Phil. Diss

Mathematik

Die konvergenzfreien linearen Räume endlicher Stufe und die dazugehörigen Matrizenringe

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde an der Hohen Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von

Fritz Menn

aus Bochum-Linden

1934

Druck: Heinrich Pöppinghaus o. H.-G., Bochum-Langendreer.

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Dezember 1933.

Dekan: Herr Prof. Dr. A. Eitel.
Referent: Herr Privatdozent Dr. G. Köthe.
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Behnke.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern!

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

§ 1. Die Aufstellung der Normalformen 3

§ 2. Die Verschiedenheit der Normalformen 12

Literatur.

O. Toeplitz: Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 28 (1909), S. 88.

G. Köthe und O. Toeplitz: Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 165 (1931), S. 116.

Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, erscheint demnächst im Journal für die reine und angewandte Mathematik.

A. Weber: Isomorphismus maximaler Matrizenringe, erscheint demnächst im Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547224_0195

Einleitung.

Für zwei Fälle ist es bisher gelungen, eine abschließende Auflösungstheorie der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten aufzustellen, einmal für die Gleichungen mit zeilenfiniter oder spaltenfiniter Matrix [1]), das andere Mal für die Gleichungen mit halbfiniter Matrix [2]). Die zu diesen Matrizen jeweils gehörigen linearen Räume sind der Raum ω aller Stellen

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots),$$

x_i eine beliebige komplexe Zahl, der Raum φ aller finiten Stellen

$$\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

und der halbfinite Raum ψ aller Stellen

$$\mathfrak{x} = (\ldots, 0, 0, x_{-k}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

(die Indizes der Koordinaten laufen von $-\infty$ bis $+\infty$) [2]).

Diese drei linearen Räume sind konvergenzfrei, d. h. enthalten mit jeder Stelle $\mathfrak{x}$ sämtliche Stellen $\mathfrak{x}'$, deren i-te Koordinate Null ist, wenn die i-te Koordinate von $\mathfrak{x}$ verschwindet ($i = 1,2, \ldots$). Die nähere Betrachtung der Auflösungstheorie für ω, φ und ψ zeigt, daß ihre Einfachheit wesentlich darauf beruht, daß diese Räume konvergenzfrei sind.

Die Aufstellung neuer, von φ, ω und ψ verschiedener konvergenzfreier Räume und der dazugehörigen Matrizen erscheint daher für die Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten von größtem Interesse.

---

[1]) O. Toeplitz, Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 28 (1909), S. 88.

[2]) G. Köthe und O. Toeplitz, Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 165 (1931), S. 116. Wir zitieren diese Arbeit im folgenden als K. T. 1.

In der vorliegenden Arbeit wird nun eine Addition und Multiplikation von konvergenzfreien Räumen definiert (vgl. § 1), durch deren wiederholte Anwendung man aus φ und ω unendlich viele konvergenzfreie lineare Räume erhält, die Räume „endlicher Stufe". Der halbfinite Raum ψ z. B. ist bis auf eine Permutation der Koordinatenindizes mit $\varphi + \omega$ identisch. Da zwei Räume, die durch eine Permutation der Koordinaten ihrer Stellen ineinander übergehen, als nicht wesentlich verschieden zu betrachten sind, werden in § 1 Normalformen für die Räume endlicher Stufe aufgestellt, derart daß jeder Raum endlicher Stufe durch eine Permutation in eine der Normalformen übergeführt werden kann. Es gibt unendlich viele solcher Normalformen (vgl. § 1, Satz 6).

Die Frage nach der „Verschiedenheit" zweier Räume endlicher Stufe kann aber auch so interpretiert werden, daß man fragt, wann zwei solche Räume α und β homöomorph sind, d. h. sich umkehrbar eindeutig linear und stetig aufeinander abbilden lassen (in Zeichen: $\alpha \sim \beta$) [3]). In § 2 wird nun gezeigt, daß zwei Räume endlicher Stufe dann und nur dann homöomorph sind, wenn sie durch eine Permutation ineinander übergehen. Die Normalformen von § 1 sind also gleichzeitig Normalformen in bezug auf Homöorphie.

Diese Resultate übertragen sich nun nach der in K. T. 2 entwickelten Theorie und den Ergebnissen von A. Weber [4]) sofort auf die zu den Räumen gehörigen maximalen Matrizenringe (vgl. den Schluß von § 2) und liefern für die Ringe Normalformen in bezug auf Ringisomorphie.

---

[3]) Für diesen Begriff vgl. G. Köthe und O. Toeplitz, Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen (§ 8), erscheint demnächst im Journal für die reine und angewandte Mathematik. Wir zitieren diese Arbeit als K. T. 2.

[4]) A. Weber, Isomorphismus maximaler Matrizenringe, erscheint demnächst im Journal für die reine und angewandte Mathematik.

§ 1. Die Aufstellung der Normalformen.

Definition 1. Sind λ und μ zwei konvergenzfreie lineare Räume, so verstehen wir unter der „Summe“ $\lambda + \mu$ den linearen Raum, der aus den Stellen

$$(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots)$$

besteht, $x_1, x_2, \ldots$ die Koordinaten einer beliebigen Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ, $y_1, y_2, \ldots$ die Koordinaten einer beliebigen Stelle $\mathfrak{y}$ aus μ.

Der lineare Raum $\varphi + \omega$ ist bis auf eine Permutation der Koordinaten gleich dem halbfiniten Raum ψ[5]), der ja aus allen Stellen

$$(\ldots 0, 0, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

besteht, $(x_{-1}, \ldots, x_{-n}, 0, 0, \ldots)$ irgendeine Stelle aus φ, $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ irgendeine Stelle aus ω.

Geht der Raum λ in den Raum μ durch eine Permutation der Koordinaten über, so nennen wir λ und μ permutationshomöomorph, in Zeichen $\lambda \cong \mu$.

Es ist also $\psi \cong \varphi + \omega$.

Definition 2. Sind λ und μ zwei konvergenzfreie lineare Räume, so verstehen wir unter dem „Produkt“ $\lambda\mu$ den linearen Raum, der aus allen Stellen besteht, die durch Ersetzen der von Null verschiedenen Koordinaten einer Stelle aus λ durch irgendwelche Stellen aus μ und der Koordinaten gleich Null durch die Stelle $\mathfrak{o} = (0, 0, \ldots)$ aus μ entstehen.

---

[5]) Vgl. K. T. 1.

Z. B. besteht $\varphi\,\omega$ aus allen Stellen

$$\mathfrak{x} = \{(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots), \ldots, (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots), (0, 0, \ldots), \ldots\},$$

die in endlich vielen Abteilungen Stellen ungleich Null aus ω enthalten, in allen anderen die Stelle 0.

$\lambda + \mu$ und $\lambda\,\mu$ sind wieder konvergenzfreie Räume.

Definition 3. Ein konvergenzfreier linearer Raum heißt *von endlicher Stufe*, wenn er permutationshomöomorph einem konvergenzfreien Raum ist, der durch endlich viele Additionen und Multiplikationen aus den Räumen φ und ω erzeugt werden kann.

Satz 1. Ist $\lambda \cong \lambda'$ und $\mu \cong \mu'$, so ist

$$\lambda + \mu \cong \lambda' + \mu' \text{ und } \lambda\,\mu \cong \lambda'\,\mu'.$$

Aus den Permutationen, die λ in λ' bzw. μ in μ' überführen, ist sofort die Permutation ersichtlich, die $\lambda + \mu$ in $\lambda' + \mu'$ und $\lambda\,\mu$ in $\lambda'\,\mu'$ überführt.

Satz 2. Für die Addition und Multiplikation von konvergenzfreien Räumen gelten folgende Rechenregeln:

1.) $\lambda + \mu \cong \mu + \lambda$

2.) $(\lambda + \mu) + \nu \cong \lambda + (\mu + \nu)$

3.) $(\lambda\,\mu)\,\nu \cong \lambda\,(\mu\,\nu)$

4.) $\lambda\,(\mu + \nu) \cong \lambda\,\mu + \lambda\,\nu$

5.) $(\lambda + \mu)\,\nu \cong \lambda\,\nu + \mu\,\nu$.

Beweis. Die Richtigkeit von 1.) und 2.) ist fast unmittelbar klar. Wir beweisen nun das Distributivgesetz, wobei wir uns auf 4.) beschränken wollen; 5.) ist ähnlich (einfacher) zu beweisen.

$\lambda\,(\mu + \nu)$ bestehet aus allen Stellen

$$\mathfrak{z} = \{(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots; y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots; y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots), \ldots\},$$

$x_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Koordinaten einer Stelle $\mathfrak{x}^{(i)}$ aus μ, $y_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Koordinaten einer Stelle $\mathfrak{y}^{(i)}$ aus ν. Die Menge M der Indizes i, für die die Stelle $(\mathfrak{x}^{(i)}, \mathfrak{y}^{(i)})$ aus $\mu + \nu$ von $(0, 0)$ verschieden ist, ist nach Definition 2 auch die Menge der Indizes

der von Null verschiedenen Koordinaten einer geeigneten Stelle $\mathfrak{r}$ aus λ.

$\lambda\mu+\lambda\nu$ besteht aus allen Stellen

$\mathfrak{s}=\{(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots), \ldots; (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots), (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots), \ldots\}$,

$x_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Koordinaten einer Stelle $\mathfrak{x}^{(i)}$ aus μ, $y_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Koordinaten einer Stelle $\mathfrak{y}^{(i)}$ aus ν. Alle i, für die $\mathfrak{x}^{(i)}$ ungleich o ist, bilden auch die Menge M_1 aller Indizes, auf denen die Koordinaten einer Stelle $\mathfrak{r}_1$ aus λ von Null verschieden sind; alle l, für die $\mathfrak{y}^{(l)} \neq o$ ist, bilden analog die Nichtnullenindizesmenge M_2 einer anderen Stelle $\mathfrak{r}_2$ aus λ.

Ich übe nun auf die Stelle $\mathfrak{z}$ aus $\lambda(\mu+\nu)$ die Permutation $\mathfrak{P}$ aus, die alle $y_k^{(i)}$ unter Erhaltung ihrer Anordnung hinter alle $x_l^{(j)}$ bringt. Dann erhalte ich offenbar eine Stelle $\mathfrak{s}'$ von demselben Typus wie $\mathfrak{s}$, und es sind die Mengen M_1 und M_2 dieser Stelle $\mathfrak{s}'$ Teilmengen der Menge M, die zu $\mathfrak{z}$ gehört. M_1 und M_2 sind also auch die Nichtnullenindizesmengen geeigneter Stellen aus λ. Die Stelle $\mathfrak{s}'$ gehört daher zu $\lambda\mu+\lambda\nu$.

Übe ich umgekehrt auf irgendeine Stelle $\mathfrak{s}$ aus $\lambda\mu+\lambda\nu$ die inverse Permutation $\mathfrak{P}^{-1}$ aus, die also die $y_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ zwischen die $x_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und die $x_k^{(i+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ einschiebt, so komme ich zu einer Stelle $\mathfrak{z}'$, deren zugehörige Menge M gleich der Vereinigungsmenge der zu $\mathfrak{s}$ gehörenden Mengen M_1 und M_2 ist. Ist aber $\mathfrak{r}_1$ aus λ gerade auf M_1 von Null verschieden und $\mathfrak{r}_2$ auf M_2, so ist bei geeigneter Abänderung der Nichtnullen von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$, die in dem konvergenzfreien Raum λ ja wieder zu Stellen $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ aus λ führt, $\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2'$ gerade auf der Vereinigungsmenge von M_1 und M_2 von Null verschieden. Unsere Stelle erhält man also, indem man für die Nichtnullen von $\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2'$ die Stellen $(\mathfrak{x}^{(i)}, \mathfrak{y}^{(i)})$ aus $\mu+\nu$ einsetzt, für die Nullen aber die Stelle (o, o) aus $\mu+\nu$. Also ist $\mathfrak{z}'$ nach Definition 2 eine Stelle aus $\lambda(\mu+\nu)$.

Aus beidem zusammen folgt jetzt 4.).

Der Beweis der Regel 3.) verläuft folgendermaßen:

Eine Stelle $\mathfrak{v}$ aus $\lambda(\mu\nu)$ entsteht aus einer Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ mit der Nichtnullenindizesmenge M, indem man für jede Koordinate aus M irgendeine Stelle aus $\mu\nu$ einsetzt, für jede nicht in M liegende Koordinate aber die Stelle o. Es wird so $\mathfrak{v}=\{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots\}$,

$\mathfrak{r}_i$ aus $\mu\nu$. Die Stellen $\mathfrak{r}_i$ aus $\mu\nu$ entstehen auf dieselbe Weise aus Stellen $\mathfrak{v}_i$ aus μ mit den Nichtnullenindizesmengen M_i. Es wird also

$$\mathfrak{v} = \{(\mathfrak{z}_1^{(1)}, \mathfrak{z}_2^{(1)}, \ldots), (\mathfrak{z}_1^{(2)}, \mathfrak{z}_2^{(2)}, \ldots), \ldots\},$$

wobei die $\mathfrak{z}_k^{(i)}$ Stellen aus ν sind, die bei festem i für alle k, die nicht zu M_i gehören, gleich $\mathfrak{o}$ sein müssen, sonst beliebig sind.

Diese Stelle $\mathfrak{v}$ kann ich mir auch so entstanden denken, daß ich zuerst in $\mathfrak{x}$ die Koordinaten durch Stellen $\mathfrak{s}_i$ aus μ mit den Nichtnullenindizesmengen M_i ersetze und dann in dieser Stelle

$$\{(\mathfrak{s}_1^{(1)}, \mathfrak{s}_2^{(1)}, \ldots), (\mathfrak{s}_1^{(2)}, \mathfrak{s}_2^{(2)}, \ldots), \ldots\}$$

aus $\lambda\mu$ die Koordinaten $\mathfrak{s}_k^{(i)}$ durch die Stellen $\mathfrak{z}_k^{(i)}$ aus ν ersetze, wobei ja nur Koordinaten, die von Null verschieden sind, durch Stellen $\neq \mathfrak{o}$ ersetzt werden. Also ist jede Stelle $\mathfrak{v}$ aus $\lambda(\mu\nu)$ auch eine Stelle aus $(\lambda\mu)\nu$.

Analog beweist man das Umgekehrte.

Durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Additionen und Multiplikationen, die zur Bildung eines konvergenzfreien Raumes endlicher Stufe aus φ und ω verwendet werden, kann man nun nach Satz 1 und den Rechenregeln von Satz 2 sofort zeigen, daß jeder konvergenzfreie Raum endlicher Stufe einem Raum der Form

$$(1) \qquad {}_i\Sigma\, \varphi^{\alpha_i}\, \omega^{\beta_i} \ldots \varphi^{\delta_i}$$

permutationhomöomorph ist, $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \delta_i$ ganze nicht negative Exponenten.

Definition 4. Ein konvergenzfreier Raum endlicher Stufe heißt *einfach*, wenn er einem Produkt aus endlich vielen Faktoren φ und ω permutationshomöomorph ist.

Satz 3. Es ist $\varphi^n \cong \varphi$, $\omega^n \cong \omega$ für $n = 1, 2, \ldots$.

Es genügt, $\varphi^2 \cong \varphi$ und $\omega^2 \cong \omega$ zu zeigen.

φ^2 besteht aus allen Stellen

$$\{(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, 0, 0, \ldots), \ldots (x_1^{(m)}, \ldots x_{n_m}^{(m)}, 0, 0, \ldots), (0, 0, \ldots), \ldots\}.$$

Umordnen der Koordinaten in eine Folge zeigt sofort $\varphi^2 \cong \varphi$.

Ähnliches gilt für den Beweis von $\omega^2 \cong \omega$.

Aus diesem Satz folgt jetzt, daß jeder konvergenzfreie Raum endlicher Stufe permutationshomöomorph einem Raum der Form

$$(2) \qquad \Sigma \ldots \varphi\omega\varphi\omega\varphi \ldots$$

ist, wobei in jedem Summanden nie gleiche Faktoren φ oder ω nebeneinanderstehen.

Definition 5. Ein konvergenzfreier Raum (2) heißt von n-ter Stufe, wenn n die höchste Anzahl von Faktoren in einem Summanden von (2) ist.

In der Form (2) gibt es nur zwei einfache Räume n-ter Stufe, nämlich für gerades n die beiden Räume

$$(\varphi\omega)^{\frac{n}{2}} \quad \text{und} \quad (\omega\varphi)^{\frac{n}{2}},$$

für ungerades n die beiden Räume

$$(\varphi\omega)^{\frac{n-1}{2}}\varphi \quad \text{und} \quad (\omega\varphi)^{\frac{n-1}{2}}\omega.$$

Satz 4. Ist λ ein konvergenzfreier Raum endlicher Stufe, so ist $\lambda + \lambda \cong \lambda$.

Beweis. Es genügt, den Satz für einfache Räume zu zeigen; denn aus (1), den Rechenregeln 1.) und 2.) von Satz 2 und Satz 1 folgt daraus die Gültigkeit für beliebige konvergenzfreie Räume endlicher Stufe.

Für einfache Räume beweisen wir ihn nun durch vollständige Induktion nach der Stufe n.

1.) $n = 1$: Ordnet man den ungeraden Koordinatenindizes der Stellen aus φ die Koordinatenindizes der ersten Gruppe der Stellen aus $\varphi + \varphi$ eindeutig zu, den geraden Indizes die der zweiten Gruppe, so erhält man eine Permutationshomöomorphie zwischen $\varphi + \varphi$ und φ. Analog für ω.

2.) Für die einfachen Räume von (n—1)-ter Stufe sei der Satz bewiesen. Ist λ ein einfacher Raum n-ter Stufe, so ist λ entweder von der Form $\lambda = \varphi\lambda'$ oder $\lambda = \omega\lambda''$, λ' und λ'' Räume von (n—1)-ter Stufe. Nach den Rechenregeln von Satz 2, der Induktionsvorraussetzung und Satz 1 folgt jetzt

$$\lambda + \lambda \cong \varphi\lambda' + \varphi\lambda' \cong \varphi(\lambda' + \lambda') \cong \varphi\lambda' \cong \lambda$$
$$\text{bzw. } \lambda + \lambda \cong \omega\lambda'' + \omega\lambda'' \cong \omega\,\lambda'' + \lambda'') \cong \omega\lambda'' \cong \lambda.$$

Satz 5. Ist λ ein einfacher Raum n-ter Stufe, μ ein einfacher Raum m-ter Stufe mit $m < n$, so ist $\mu + \lambda \cong \lambda$.

Beweis. Es genügt, dies für $m = n-1$ zu zeigen; denn ist σ von $(n-2)$-ter Stufe, so ist, wenn λ von n-ter Stufe, μ von $(n-1)$-ter Stufe ist,

$$\lambda \cong \mu + \lambda \cong (\sigma + \mu) + \lambda \cong \sigma + (\mu + \lambda) \cong \sigma + \lambda,$$

und so weiter für Räume niedrigerer Stufe.

Wir zeigen zuerst die Äquivalenzen

a) $\omega + \varphi\omega \cong \varphi\omega$

b) $\varphi + \omega\varphi \cong \omega\varphi$

c) $\varphi + \varphi\omega \cong \varphi\omega$

d) $\omega + \omega\varphi \cong \omega\varphi$.

Die Äquivalenzen a) und b) sind leicht einzusehen.

c) beweisen wir so: Eine Stelle aus $\varphi + \varphi\omega$ hat die Form

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, 0, 0, \ldots),$$

$\mathfrak{y}$ aus φ, $\mathfrak{x}_i$ aus ω. Eine Stelle aus $\varphi\omega$ hat die Form

$$(\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_n', 0, 0, \ldots),$$

$\mathfrak{x}_i'$ aus ω. Ordne ich nun den Koordinatenindizes 1,2,3,... der Stelle $\mathfrak{x}_i$ die Koordinatenindizes 2,3,4,... von $\mathfrak{x}_i'$ eindeutig zu, ferner der i-ten Koordinate von $\mathfrak{y}$ die erste Koordinate von $\mathfrak{x}_i'$, so bekomme ich eine Permutation, die $\varphi + \varphi\omega$ in $\varphi\omega$ überführt.

d) ist wie c) zu beweisen.

Allgemein sei nun λ ein einfacher Raum n-ter Stufe.

Ist n gerade, so hat λ entweder die Form

$$(\varphi\omega)^{\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad (\omega\varphi)^{\frac{n}{2}}.$$

μ muß dann entweder gleich

$$(\varphi\omega)^{\frac{n-2}{2}}\,\varphi \quad \text{oder} \quad (\omega\varphi)^{\frac{n-2}{2}}\,\omega$$

sein. Dies gibt vier Fälle, die unter Benutzung von a) bis d) folgendes ergeben:

$$\mu+\lambda \cong \left\{ \begin{array}{l} (\omega\varphi)^{\frac{n-2}{2}}\,\omega+(\varphi\omega)^{\frac{n}{2}} \cong (\omega+\varphi\omega)\,(\varphi\omega)^{\frac{n-2}{2}} \cong (\varphi\omega)^{\frac{n}{2}} \\ (\varphi\omega)^{\frac{n-2}{2}}\,\varphi+(\omega\varphi)^{\frac{n}{2}} \cong (\varphi+\omega\varphi)\,(\omega\varphi)^{\frac{n-2}{2}} \cong (\omega\varphi)^{\frac{n}{2}} \\ (\varphi\omega)^{\frac{n-2}{2}}\,\varphi+(\varphi\omega)^{\frac{n}{2}} \cong (\varphi\omega)^{\frac{n-2}{2}}\,(\varphi+\varphi\omega) \cong (\varphi\omega)^{\frac{n}{2}} \\ (\omega\varphi)^{\frac{n-2}{2}}\,\omega+(\omega\varphi)^{\frac{n}{2}} \cong (\omega\varphi)^{\frac{n-2}{2}}\,(\omega+\omega\varphi) \cong (\omega\varphi)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right\} \cong \lambda.$$

Für ungerades n ist die Betrachtung analog durchzuführen.

Aus Satz 4 und 5 ergeben sich nun die gesuchten Normalformen:

Satz 6. Jeder konvergenzfreie Raum n-ter Stufe ist permutationshomöomorph einer der drei Normalformen,
für gerades n:

$$(\varphi\omega)^{\frac{n}{2}}, \qquad (\omega\varphi)^{\frac{n}{2}}, \qquad (\varphi\omega)^{\frac{n}{2}}+(\omega\varphi)^{\frac{n}{2}},$$

für ungerades n:

$$(\varphi\omega)^{\frac{n-1}{2}}\,\varphi, \qquad (\omega\varphi)^{\frac{n-1}{2}}\,\omega, \qquad (\varphi\omega)^{\frac{n-1}{2}}\,\varphi+(\omega\varphi)^{\frac{n-1}{2}}\,\omega.$$

Wir haben also drei Normalformen für die n-te Stufe gefunden. Zwei davon sind einfach. Die dritte bezeichnen wir als die zusammengesetzte Normalform. Es wird sich später herausstellen, daß sie keiner einfachen Normalform homöomorph ist. Wir bemerken noch, daß sie sich auch in der Form $(\omega+\varphi)^n$ oder ψ^n schreiben läßt, ψ der halbfinite Raum; denn es ergibt sich unmittelbar aus unseren Sätzen, daß $(\omega+\varphi)^n$ und ψ^n permutationshomöomorph der zusammengesetzten Normalform n-ter Stufe sind.

Satz 7. Die Normalformen sind vollkommene Räume, und der zur Normalform λ duale Raum λ^* entsteht aus λ durch Vertauschen von ω und φ.

Unter dem dualen Raum λ^* von λ versteht man[6]) die Gesamtheit aller Stellen $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, für die das skalare Produkt $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ immer existiert, $\mathfrak{x}$ beliebig aus λ. (Es ist $\varphi^* = \omega$, $\omega^* = \varphi$.)

Ein linearer Raum λ heißt vollkommen, wenn

$$(\lambda^*)^* = \lambda^{**} = \lambda \text{ ist.}$$

Beweis. Es genügt, den Satz für die einfachen Normalformen zu beweisen; denn es ist $(\alpha +_i \beta)^* = \alpha^* +_i \beta^*$, wie man ohne Mühe einsieht. Wenn also α^* und β^* durch Vertauschen von ω und φ aus α bzw. β hervorgehen, so auch $(\alpha +_i \beta)^*$ aus $\alpha +_i \beta$. Ferner folgt aus $\alpha^{**} = \alpha$, $\beta^{**} = \beta$ die Beziehung

$$(\alpha +_i \beta)^{**} = (\alpha^* +_i \beta^*)^* = \alpha^{**} +_i \beta^{**} = \alpha +_i \beta.$$

also ist auch $\alpha + \beta$ vollkommen.

Unser Satz ist daher für die zusammengesetzten Normalformen richtig, wenn er es für die einfachen ist.

Für die einfachen Normalformen beweisen wir ihn durch Induktion nach der Stufe. Für ω und φ ist der Satz richtig. Wir setzen seine Richtigkeit für die Räume n-ter Stufe voraus. Eine der beiden einfachen Normalformen (n + 1)-ter Stufe hat die Form $\omega\alpha'$, α' von n-ter Stufe. Eine Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\omega\alpha'$ hat die Form $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots)$, $\mathfrak{x}_i$ eine beliebige Stelle aus α'. Eine Stelle $\mathfrak{u} = (u_1 u_2, \ldots)$ des dualen Raumes kann als u_i nur Stellen aus $(\alpha')^*$ haben, sonst würde das Produkt $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{x}_i$ divergieren. Es dürfen auch nur endlich viele u_i von der Nullstelle verschieden sein aus demselben Grunde. Alle Stellen $\mathfrak{u}$, die beide Bedingungen erfüllen, gehören aber auch wirklich dem dualen Raum von $\omega\alpha'$ an, da für diese $\mathfrak{u}$ das Produkt $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ immer konvergiert. Also ist $(\omega\alpha')^* = \varphi(\alpha')^*$. $(\alpha')^*$ entsteht durch Vertauschen von φ und ω aus α'; also entsteht auch $(\omega\alpha')^*$ durch Vertauschen von φ und ω aus $\omega\alpha'$. $(\omega\alpha')^*$ ist also die andere einfache Normalform (n+1)-ter Stufe. Auf ähnliche Weise wie eben findet man, daß der duale Raum zu $(\omega\alpha')^*$ auch durch Vertauschen von ω und φ aus $(\omega\alpha')^*$ hervorgeht. Dies bedeutet aber $(\omega\alpha')^{**} = \omega\alpha'$, d. h. $\omega\alpha'$ ist vollkommen. Ebenso gilt für die andere einfache Normalform $(\omega\alpha')^*$ die Relation $(\omega\alpha')^{***} = (\omega\alpha')^*$.

---

[6]) Vgl. K. T. 2, § 2.

Wir bemerken, daß jeder Raum endlicher Stufe vollkommen ist, nicht nur die Normalformen. Denn ein beliebiger solcher Raum entsteht durch eine Permutation der Koordinaten aus einer Normalform. Dabei ändert sich aber, wie leicht einzusehen ist, an der Vollkommenheit nichts.

Schließlich sei noch erwähnt, daß neben $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$ auch die Beziehung $(\alpha\,\beta)^* = \alpha^*\beta^*$ für beliebige Räume endlicher Stufe richtig ist. Den Beweis übergehen wir.

§ 2. Die Verschiedenheit der Normalformen.

Eine lineare Abbildung eines vollkommenen Raumes λ auf einen Teilraum ν eines anderen vollkommenen Raumes μ heißt stetig, wenn jeder gegen eine Stelle $\mathfrak{x}$ konvergenten Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ eine Folge $\mathfrak{y}^{(n)}$ aus μ entspricht, die ebenfalls gegen eine Stelle $\mathfrak{y}$ konvergiert, die das Bild von $\mathfrak{x}$ ist. Eine eineindeutige und umkehrbar stetige lineare Abbildung von λ auf ganz μ heißt eine Homöomorphie. Ist der Bildraum ν bei einer stetigen Abbildung ein echter Teilraum von μ und ist auch hier die Abbildung eineindeutig und umkehrbar stetig — wobei die Stetigkeit in ν natürlich durch den Konvergenzbegriff in μ und nicht den in ν erklärt ist —, so sprechen wir von einer Homöomorphie von λ auf einen Teilraum ν von μ.

Satz 1. ω ist nicht homöomorph einem Teilraum von φ.

Beweis. Wir nehmen an, es sei ω homöomorph einem Teilraum ν von φ. Die Folge $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ist in ω gegen 0 konvergent [7]). Die Bildfolge $\mathfrak{e}_i'$ in ν muß also im Sinne der Stetigkeit in φ konvergent sein. Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ von Stellen aus φ ist aber nur dann konvergent [7]), wenn die m-ten Koordinaten aller $\mathfrak{x}^{(n)}$ für $m > M$, M eine geeignete ganze Zahl, sämtlich Null sind. Solcher Stellen gibt es aber höchstens M linear unabhängige. Für ein geeignetes k müßte also $\mathfrak{e}_k'$ durch M von ihm verschiedene $\mathfrak{e}_{\alpha_i}'$ linear ausdrückbar sein,

$$\mathfrak{e}_k' = a_1 \mathfrak{e}_{\alpha_1}' + \cdots\cdots + a_M \mathfrak{e}_{\alpha_M}'.$$

Aus der Homöomorphie würde dann umgekehrt auch

$$\mathfrak{e}_k = a_1 \mathfrak{e}_{\alpha_1} + \cdots\cdots + a_M \mathfrak{e}_{\alpha_M}$$

folgen, was unmöglich ist.

---

[7]) Vgl. K. I. 2, § 15.

Es gilt auch umgekehrt, daß φ keinem Teilraum von ω homöomorph ist. Würde allgemein gelten, daß eine einfache Normalform niemals einem Teilraum ihres dualen Raumes homöomorph ist, so würde daraus sehr leicht die Nichthomöomorphie aller einfachen Normalformen folgen. Jener Satz ist aber falsch [8]). Wir dürfen, um zum Ziele zu gelangen, im allgemeinen Falle nur eine spezielle Art von Teilräumen zulassen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen.

---

[8]) Für $\lambda = \varphi, \omega, \varphi\omega, \omega\varphi, \omega\varphi\omega$ gilt der Satz, daß λ keinem Teilraum von λ^* homöomorph ist. Wir zeigen nun, daß $\omega\varphi\omega$ einen zu $\varphi\omega\varphi$ homöomorphen Teilraum besitzt.

Die Stellen $\mathfrak{x}$ aus $\varphi\omega\varphi$ haben die Form $\mathfrak{x} = \{\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, 0, 0, \ldots\}$, $\mathfrak{x}_i$ aus $\omega\varphi$. $\mathfrak{x}_i$ hat die Form $\mathfrak{x}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots)$, ξ_{ik} aus φ. Wir denken uns nun die Koordinaten der Stellen $\mathfrak{x}$ aus $\varphi\omega\varphi$ so numeriert, daß x_{ikl} die l-te Koordinate von $\mathfrak{x}_{ik}$ bedeutet. Analog sind jetzt die Einheitsvektoren durch drei Indizes zu charakterisieren, also e_{ikl}. Genau so sind natürlich die Koordinaten einer Stelle aus $\omega\varphi\omega$ durch Koordinatentripel zu charakterisieren. Die Abbildung von $\varphi\omega\varphi$ in $\omega\varphi\omega$ ist bestimmt, wenn wir die Bildstellen e_{ikl}' der e_{ikl} angeben. Wir denken uns die natürlichen Zahlen in ein Doppelschema geordnet; m_{ik} sei die natürliche Zahl, die in der i-ten Zeile und k-ten Spalte des Doppelschemas steht. Die Bildstelle e_{ikl}' sei die Stelle

$$e_{ikl}' = e_{1,i,m_{kl}} + e_{1+m_{ik},\,1,\,1}.$$

Damit ist jeder Stelle $\mathfrak{x} = \sum \lambda_{ikl}\, e_{ikl}$ aus $\varphi\omega\varphi$ eine Stelle

$$\mathfrak{x}' = \sum \lambda_{ikl}\, e_{1,i,m_{kl}} + \sum \lambda_{ikl}\, e_{1+m_{ik},\,1,\,1}$$

zugeordnet. Wir haben zu zeigen, daß diese Zuordnung 1.) jeder Stelle aus $\varphi\omega\varphi$ eine Stelle aus $\omega\varphi\omega$ zuordnet, 2.) daß wir eine Homöomorphie vor uns haben.

Zu 1.) Eine Stelle $\sum \lambda_{ikl}\, e_{ikl}$ gehört dann und nur dann zu $\varphi\omega\varphi$, wenn nur für endlich viele i $\lambda_{ikl} \neq 0$ ist, k, l beliebig, wenn ferner für festes i, k λ_{ikl} nur für endlich viele l von Null verschieden ist.

Eine Stelle $\sum \mu_{ikl}\, e_{ikl}$ gehört dann und nur dann zu $\omega\varphi\omega$, wenn zu jedem festen i nur für endlich viele k $\mu_{ikl} \neq 0$ ist. Die Stelle

$$\mathfrak{x}' = \sum \lambda_{ikl}\, e_{1,i,m_{kl}} + \sum \lambda_{ikl}\, e_{1+m_{ik},\,1,\,1}$$

erfüllt nun diese Bedingung; denn für die erste Summe folgt dies unmittelbar daraus, daß λ_{ikl} nur für endlich viele i von Null verschieden ist, für die zweite Summe daraus, daß für festes i, k (also festes $1 + m_{ik}$) λ_{ikl} nur für endlich viele l von Null verschieden ist. Also sind alle $\mathfrak{x}'$ Stellen aus $\omega\varphi\omega$.

Zu 2.) Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = \sum \lambda_{ikl}{}^{(n)}\, e_{ikl}$ von Stellen aus $\varphi\omega\varphi$ konvergiert dann und nur dann gegen eine Stelle $\mathfrak{x}$, wenn sie koordinatenweise gegen $\mathfrak{x}$ konvergiert, wenn $\lambda_{ikl}{}^{(n)} = 0$ für $i > i_0$ (i_0 unabhängig von n) und wenn

Definition 1. λ heißt die direkte stetige Summe zweier Teilräume λ_1 und λ_2, $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$, wenn jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ auf eine und nur eine Art in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ darstellbar ist, $\mathfrak{x}_1$ aus λ_1, $\mathfrak{x}_2$ aus λ_2, und wenn eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}_1^{(n)} + \mathfrak{x}_2^{(n)}$ dann und nur dann gegen eine Stelle $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ konvergiert, wenn $\mathfrak{x}_1^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x}_2$ konvergiert.

Es ergibt sich leicht

Hilfssatz 1. Ist λ direkter stetiger Summand von μ, μ direkter stetiger Summand von ν, so ist λ direkter stetiger Summand von ν.

---

für festes i, k $\lambda_{ikl}^{(n)} = 0$ ist für $l > l_0(i,k)$ und alle n (der Beweis folgt leicht aus K. T. 2, § 5, Satz 5 und § 15, Satz 3, 4).

Eine Folge $\mathfrak{y}^{(n)} = \sum \mu_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{ikl}$ von Stellen aus $\omega\varphi\omega$ konvergiert dann und nur dann gegen eine Stelle $\mathfrak{y}$, wenn sie koordinatenweise gegen $\mathfrak{y}$ konvergiert und wenn für festes i $\mu_{ikl}^{(n)} = 0$ ist für $k > k_0(i)$ und alle n und l. Analog wie unter 1.) sieht man nun, daß die Folge $\mathfrak{x}^{(n)\prime}$ gegen $\mathfrak{x}'$ konvergiert, wenn $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x}$ konvergiert.

Zum Beweise der Homöomorphie haben wir nur noch umgekehrt zu zeigen, daß aus der Konvergenz einer Folge

$$\mathfrak{y}^{(n)} = \sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{1,i,m_{kl}} + \sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{1+m_{ik},l,1}$$

gegen eine Stelle

$$\mathfrak{y} = \sum \lambda_{ikl} \mathfrak{e}_{1,i,m_{kl}} + \sum \lambda_{ikl} \mathfrak{e}_{1+m_{ik},l,1}$$

die Konvergenz der Folge

$$\mathfrak{x}^{(n)} = \sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{ikl}$$

gegen die Stelle

$$\mathfrak{x} = \sum \lambda_{ikl} \mathfrak{e}_{ikl}$$

folgt.

Konvergiert $\mathfrak{y}^{(n)}$ koordinatenweise gegen $\mathfrak{y}$, so auch $\mathfrak{x}^{(n)}$ koordinatenweise gegen $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{y}^{(n)}$ konvergiert nur dann, wenn

$$\sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{1,i,m_{kl}} \text{ und } \sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{1+m_{ik},l,1}$$

für sich konvergieren. Durch Betrachtung von $\sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{1,i,m_{kl}}$ folgt, daß $\lambda_{ikl}^{(n)}$ nur für endlich viele i (unabhängig von n) von Null verschieden sein kann, also $\lambda_{ikl}^{(n)} = 0$ ist für $i > i_0$. Aus der Konvergenz von $\sum \lambda_{ikl}^{(n)} \mathfrak{e}_{1+m_{ik},l,1}$ erschließt man analog, daß für festes i, k ein von n unabhängiges $l_0(i,k)$ existiert, so daß $\lambda_{ikl}^{(n)} = 0$ ist für $l > l_0$. Beides zusammen heißt aber gerade, daß $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x}$ konvergiert.

Damit ist die Homöomorphie von $\varphi\omega\varphi$ auf einen Teilraum von $\omega\varphi\omega$ bewiesen.

Der Zusammenhang zwischen der in § 1, Definition 1 erklärten „Addition" $\lambda + \mu$ und der eben eingeführten ist der folgende: $\lambda + \mu$ besteht aus allen Paaren (ξ, η), ξ aus λ, η aus μ. Die Stellen $(\xi, 0)$ bilden einen Teilraum λ_1 von $\lambda + \mu$, die Stellen $(0, \eta)$ einen, μ_1, und es ist die Summe $\lambda_1 \oplus \mu_1$ stetig, direkt und gleich $\lambda + \mu$. Über den Zusammenhang zwischen λ und λ_1 gibt Auskunft

Hilfssatz 2. Streichen wir in jeder Stelle ξ eines konvergenzfreien Raumes ν die Koordinaten, deren Indizes einer bestimmten Menge M angehören, so bilden die so erhaltenen Stellen η einen konvergenzfreien Raum λ. Zu jeder Stelle η aus λ bilden wir uns eine Stelle η_1 in ν, indem wir die fehlenden Koordinaten mit Nullen besetzen. Die η_1 bilden einen Teilraum λ_1 von ν. Eine Folge $\eta^{(n)}$ von Stellen aus λ konvergiert dann und nur dann gegen η, wenn die Folge $\eta_1^{(n)}$ gegen η_1 konvergiert; λ und λ_1 sind also homöomorph.

Beweis. Eine Stelle $\mathfrak{u}$ des Raumes λ^* wird durch Besetzen der fehlenden Koordinaten mit Nullen zu einer Stelle $\mathfrak{u}_1$ aus ν^*. Umgekehrt entsteht aus jeder Stelle $\mathfrak{u}_1$ aus ν^* durch Streichen der Koordinaten mit Indizes aus M eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^*. Nun gilt

$$\mathfrak{u}_1 \eta_1^{(n)} = \mathfrak{u}\, \eta^{(n)}.$$

Wenn also

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{u}_1 \eta_1^{(n)} = \mathfrak{u}_1 \eta_1$$

ist für alle $\mathfrak{u}_1$ aus ν^*, so ist auch

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{u}\, \eta^{(n)} = \mathfrak{u}\, \eta$$

für alle $\mathfrak{u}$ aus λ^* und umgekehrt; d. h. $\eta^{(n)}$ konvergiert dann und nur dann gegen η, wenn $\eta_1^{(n)}$ gegen η_1 konvergiert.

Satz 2. Jeder direkten stetigen Zerlegung $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$ eines vollkommenen Raumes λ entspricht eine direkte stetige Zerlegung des dualen Raumes λ^*, $\lambda^* = (\lambda^*)_1 \oplus (\lambda^*)_2$. Es ist $(\lambda^*)_1$ die Gesamtheit aller Stellen $\mathfrak{u}_1$ aus λ^*, für die $\mathfrak{u}_1 \xi_2 = 0$

ist für alle $\mathfrak{x}_2$ aus λ_2, entsprechend $(\lambda^*)_2$ die Gesamtheit aller Stellen $\mathfrak{u}_2$ aus λ^*, für die $\mathfrak{u}_2\mathfrak{x}_1 = 0$ ist für alle $\mathfrak{x}_1$ aus λ_1.

Beweis. Nach K. T. 2, § 3, Satz 6 wird durch jede Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^* eine auf ganz λ stetige Linearfunktion $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ erklärt. Umgekehrt gibt es zu jeder auf ganz λ erklärten stetigen Linearfunktion $\mathfrak{u}(\mathfrak{x})$ eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^*, so daß $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ ist für alle $\mathfrak{x}$ aus λ.

Es sei nun $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ eine beliebige stetige Linearfunktion. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ sei die Zerlegung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ in λ_1, $\mathfrak{x}_2$ in λ_2. Durch die Gleichung

$$\mathfrak{u}_1(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) = \mathfrak{u}(\mathfrak{x}_1)$$

ist offenbar eine Linearfunktion $\mathfrak{u}_1(\mathfrak{x})$ erklärt, deren Wert für alle $\mathfrak{x}_2$ aus λ_2 gleich Null ist. Diese Linearfunktion ist ferner stetig; denn aus

$$\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_1^{(n)} + \mathfrak{x}_2^{(n)}) = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 \text{ folgt } \lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_1^{(n)} = \mathfrak{x}_1, \text{ also}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}_1(\mathfrak{x}_1^{(n)} + \mathfrak{x}_2^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}(\mathfrak{x}_1^{(n)}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{x}_1) = \mathfrak{u}_1(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2).$$

Analog erklären wir eine stetige Linearfunktion $\mathfrak{u}_2(\mathfrak{x})$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{u}_2(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) = \mathfrak{u}(\mathfrak{x}_2).$$

Es ist offenbar

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}_1(\mathfrak{x}) + \mathfrak{u}_2(\mathfrak{x})$$

für alle $\mathfrak{x}$ aus λ. Auf diese Weise ist jede Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^* als Summe zweier Stellen, $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$, dargestellt. Es ist $\mathfrak{u}_1\mathfrak{x}_2 = 0$ für alle $\mathfrak{x}_2$ aus λ_2, $\mathfrak{u}_2\mathfrak{x}_1 = 0$ für alle $\mathfrak{x}_1$ aus λ_1. Die $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ bilden je einen linearen Raum $(\lambda^*)_1$ bzw. $(\lambda^*)_2$. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$, die man so beweist: Wäre auch $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1' + \mathfrak{u}_2'$, so wäre $\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2' - \mathfrak{u}_2$. Die linke Seite annulliert alle $\mathfrak{x}_2$ aus λ_2, die rechte Seite alle $\mathfrak{x}_1$ aus λ_1; also ist $(\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}_1)\,\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{x}$ aus λ, d. h. $\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{u}_1$; ebenso $\mathfrak{u}_2' = \mathfrak{u}_2$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die direkte Zerlegung $\lambda^* = (\lambda^*)_1 \oplus (\lambda^*)_2$ auch stetig ist. Es konvergiere $\mathfrak{u}^{(n)} = \mathfrak{u}_1^{(n)} + \mathfrak{u}_2^{(n)}$ gegen $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$. Dann muß speziell

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}_1^{(n)}\,\mathfrak{x}_1 = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{u}_1^{(n)} + \mathfrak{u}_2^{(n)})\,\mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2)\,\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{u}_1\mathfrak{x}_1$$

sein. Daher ist für jedes $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ aus λ

$$\lim_{n\to\infty} u_1^{(n)}\mathfrak{x} = \lim_{n\to\infty} u_1^{(n)}\mathfrak{x}_1 = u_1\mathfrak{x}_1 = u_1\mathfrak{x},$$

d. h. $u_1^{(n)}$ konvergiert gegen u_1.
Ebenso muß $u_2^{(n)}$ gegen u_2 konvergieren.
Die Zerlegung $\lambda^* = (\lambda^*)_1 \oplus (\lambda^*)_2$ ist also stetig.

Satz 3. Ist λ homöomorph einem direkten stetigen Summanden μ_1 von μ, so ist λ^* homöomorph dem direkten stetigen Summanden $(\mu^*)_1$ von μ^*.

Beweis. Es gibt nach Voraussetzung eine direkte stetige Zerlegung $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2$. Die den Stellen $\mathfrak{x}$ aus λ zugeordneten Stellen $\mathfrak{x}'$ durchlaufen also alle Stellen aus μ_1. u sei irgendeine Stelle des dualen Raumes λ^*. Wir fassen u wieder als stetige Linearfunktion $u(\mathfrak{x})$ auf. Durch die Gleichung

$$v_1(\mathfrak{x}' + \mathfrak{z}) = u(\mathfrak{x}),$$

$\mathfrak{x}'$ beliebig aus μ_1, $\mathfrak{z}$ beliebig aus μ_2, wird eine Linearfunktion $v_1(\mathfrak{y})$ für alle $\mathfrak{y}$ aus μ erklärt. $v_1(\mathfrak{y})$ ist eine stetige Linearfunktion; denn aus

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{y}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}^{(n)\prime} + \mathfrak{z}^{(n)}) = \mathfrak{y} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{z}$$

folgt $\lim \mathfrak{x}^{(n)\prime} = \mathfrak{x}'$, also wegen der Homöomorphie $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}$ und daraus $\lim_{n\to\infty} u(\mathfrak{x}^{(n)}) = u(\mathfrak{x})$, somit $\lim_{n\to\infty} v_1(\mathfrak{y}^{(n)}) = v_1(\mathfrak{y})$.

$v_1(\mathfrak{y})$ ist als stetige Linearfunktion, die für alle $\mathfrak{z}$ aus μ_2 verschwindet, nach Satz 2 also eine Stelle v_1 aus $(\mu^*)_1$. Somit ist jedem u aus λ^* ein v_1 aus $(\mu^*)_1$ zugeordnet; beide sind durch die Gleichung $u\mathfrak{x} = v_1\mathfrak{x}'$ verknüpft.

Verschiedenen u sind verschiedene v_1 zugeordnet; denn aus $(u - u')\mathfrak{x} \neq 0$ folgt $(v_1 - v_1')\mathfrak{x}' \neq 0$. Wir können aber auch umgekehrt die Gleichung $u\mathfrak{x} = v_1\mathfrak{x}'$ als Definition einer Stelle u von λ^* auffassen bei gegebenem v_1 aus $(\mu^*)_1$, so daß jedem u ein und nur ein v_1 und umgekehrt zugeordnet ist.

Daß diese eindeutige Abbildung von λ^* auf $(\mu^*)_1$ eine Homöomorphie ist, folgt nun leicht:

Die Konvergenz von $u^{(n)}$ gegen u bedeutet $\lim_{n\to\infty} u^{(n)}\mathfrak{x} = u\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$ aus λ. Dies geht über in $\lim_{n\to\infty} v_1^{(n)}\mathfrak{x}' = v_1\mathfrak{x}'$ für alle $\mathfrak{x}'$ aus μ_1. Da $v_1^{(n)}\mathfrak{z} = v_1\mathfrak{z} = 0$ ist für jedes $\mathfrak{z}$ aus μ_2, ist $\lim_{n\to\infty} v_1^{(n)}\mathfrak{y} = v_1\mathfrak{y}$

für jedes ν aus μ, d. h. $\nu_1^{(n)}$ konvergiert gegen ν_1. Analog beweist man, daß jeder konvergenten Folge $\nu_1^{(n)} \to \nu_1$ in $(\mu^*)_1$ eine konvergente Folge $u^{(n)} \to u$ zugeordnet ist.

Satz 4. **Die einfache Normalform α n-ter Stufe ist nicht homöomorph einem direkten stetigen Summanden von α^*.**

Beweis. Nach Satz 1 gilt die Behauptung jedenfalls für ω. Wäre nun φ homöomorph einem direkten stetigen Summanden von ω, so müßte nach Satz 3 $\varphi^* = \omega$ homöomorph einem direkten stetigen Summanden von $\omega^* = \varphi$ sein, was Satz 1 widerspricht. Also ist Satz 4 für $n = 1$ richtig. Er sei nun für n—1 bewiesen. Um seine Richtigkeit für n zu zeigen, genügt es, ihn für die Normalform $\alpha = \omega\alpha_1$ zu beweisen; denn für die zweite Normalform n-ter Stufe, $\alpha^* = \varphi\alpha_1^*$, folgt er dann wiederum aus Satz 3.

Es sei nun $\alpha = \omega\alpha_1$ homöomorph einem direkten stetigen Summanden μ_1 von $\alpha^* = \varphi\alpha_1^*$. Es sei $\varphi\alpha_1^* = \mu_1 \oplus \mu_2$. Jede Stelle ξ von $\omega\alpha_1$ hat die Form $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, ξ_i beliebig aus α_1; jede Stelle ν aus $\varphi\alpha_1^*$ hat die Form $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k, 0, 0, \ldots)$, ν_i beliebig aus α_1^*.

Eine Folge $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$ von Stellen aus $\omega\alpha_1$ ist sicher dann gegen 0 konvergent, wenn die Indizes k_n, k_n der kleinste Index i, für den $\xi_i^{(n)} \neq 0$ ist für festes n, eine mit n gegen unendlich strebende Folge bilden.

Eine Folge $\nu^{(n)} = (\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_{k_n}^{(n)}, 0, 0, \ldots)$ von Stellen aus $\varphi\alpha_1^*$ ist nur dann konvergent, wenn es eine von n unabhängige Zahl M gibt, so daß $\nu_m^{(n)} = 0$ ist für $m > M$ und alle n.

Wir betrachten den Teilraum ξ_n von $\omega\alpha_1$, der aus den Stellen

$$\xi = (0, 0, \ldots, 0, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$$

besteht. Bei der Homöomorphie von $\omega\alpha_1$ auf μ_1 entsprechen den Stellen von ξ_n Stellen aus μ_1. Es muß nun ein N geben, so daß die Bilder aller ξ aus ξ_N die Form

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_M, 0, 0, \ldots)$$

haben, wobei M für alle ν dieselbe Zahl ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnte ich aus jedem ξ_n eine Stelle $\xi^{(n)}$ herausgreifen, deren Bildstelle $\nu^{(n)} = (\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots)$ wenigstens ein $\nu_i^{(n)} \neq 0$ besitzt, $i > n$. Die Folge $\xi^{(n)}$ konvergiert gegen 0; die Folge $\nu^{(n)}$

wäre jedoch divergent im Widerspruch zur Homöomorphie.
Alle Stellen $(0, 0, \ldots, 0, \xi_N, 0, 0, \ldots)$ bilden nun einen Teilraum von $\omega\alpha_1$, der nach Hilfssatz 2 homöomorph α_1 ist. Alle Stellen $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_M, 0, 0, \ldots)$ bilden einen Teilraum η von $\varphi\alpha_1^*$, der nach Hilfssatz 2 und § 1, Satz 4 homöomorph α_1^* ist. Unsere Homöomorphie von $\omega\alpha_1$ auf μ_1 enthält also eine Homöomorphie von α_1 auf einen Teilraum γ von η. α_1 und der zu η homöomorphe Raum α_1^* sind einfache Normalformen (n—1)-ter Stufe. Um zu einem Widerspruch zu gelangen, genügt es also zu zeigen, daß γ ein direkter stetiger Summand von η ist. Nun ist α_1 (als Gesamtheit der Stellen $(0, 0, \ldots, 0, \xi_N, 0, 0, \ldots)$ aufgefaßt) ein direkter stetiger Summand von $\omega\alpha_1$. Also ist wegen der Homöomorphie von $\omega\alpha_1$ mit μ_1 γ direkter stetiger Summand von μ_1; μ_1 ist direkter stetiger Summand von $\varphi\alpha_1^*$. Nach Hilfssatz 1 ist daher γ direkter stetiger Summand von $\varphi\alpha_1^*$. Es sei $\varphi\alpha_1^* = \gamma \oplus \gamma'$ eine solche direkte stetige Zerlegung. Jede Stelle $\mathfrak{z}$ des Raumes η aller Stellen $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_M, 0, 0, \ldots)$ zerfällt danach in $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_1$ in γ, $\mathfrak{z}_2$ in γ'. Nun ist aber, wie aus der Konstruktion von η oben folgt, γ ein Teilraum von η; also bildet auch die Gesamtheit aller $\mathfrak{z}_2$ einen Teilraum δ von η. Wir haben also eine direkte Zerlegung $\eta = \gamma \oplus \delta$.
Diese Zerlegung ist auch stetig, da ja die Zerlegung

$$\varphi\alpha_1^* = \gamma \oplus \gamma',$$

die mit der Zerlegung $\eta = \gamma \oplus \delta$ in η identisch ist, stetig ist. γ ist daher direkter stetiger Summand von η, womit unser Satz bewiesen ist.

Aus dem Beweise von § 1, Satz 5 entnimmt man ohne weiteres, daß jeder Raum β niedriger als n-ter Stufe aus jedem Raum α n-ter Stufe erhalten werden kann durch Streichen gewisser Koordinaten aus allen Stellen $\mathfrak{x}$ von α. Ergänzt man die gestrichenen Koordinaten durch Nullen, so bekommt man β nach Hilfssatz 2 als Teilraum von α. Man sieht ohne weiteres, daß dieser Teilraum β direkter stetiger Summand von α ist. Aus Satz 4 folgt daher, daß zwei verschiedene einfache Normalformen niemals homöomorph sind.

Satz 5. Eine einfache und eine zusammengesetzte Normalform sind niemals homöomorph.

Beweis. Ist α einfach, so ist, wie eben gezeigt, α nicht homöomorph α^*. Ist $\beta = (\varphi + \omega)^n$, so ist β^* homöomorph β nach § 1, Satz 7. Wäre $\alpha \sim \beta$, so wäre nach K. T. 2, § 8, Satz 5 auch $\alpha^* \sim \beta^*$; also müßte, da $\beta \sim \beta^*$ ist, $\alpha \sim \alpha^*$ sein, was ein Widerspruch ist.

Satz 6. ψ^n ist keinem direkten stetigen Summanden von ψ^{n-1} homöomorph.

Beweis. Jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus ψ^n hat die Form

$$\mathfrak{x} = (\ldots, 0, 0, \mathfrak{x}_{-m}, \ldots, \mathfrak{x}_{-1}, \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots),$$

$\mathfrak{x}_i$ aus ψ^{n-1}. Betrachten wir die Gesamtheit λ_k der Stellen

$$(\ldots, 0, 0, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_{k+1}, \ldots),$$

so bildet sie nach Streichen der Stellen 0 mit einem Index $< k$ einen Raum $\omega\psi^{n-1}$. Nach § 1 ist dieser Raum permutationshomöomorph dem einfachen Raum $\omega\alpha$ n-ter Stufe. Analog bildet die Gesamtheit μ_l aller Stellen

$$(\ldots, 0, 0, \mathfrak{y}_l, \mathfrak{y}_{l+1}, \ldots)$$

von ψ^{n-1} nach Streichen der 0 mit einem Index $< l$ einen Raum, der bis auf eine Permutation gleich dem einfachen Raum $\omega\alpha_l$ (n—1)-ter Stufe ist.

Wir nehmen nun an, daß ψ^n homöomorph einem direkten stetigen Summanden γ von ψ^{n-1} ist. λ_k ist ein direkter stetiger Summand von ψ^n. Sein Bildraum λ_k' muß also wegen der Homöomorphie nach Hilfssatz 1 ein direkter stetiger Summand von ψ^{n-1} sein. Wäre λ_k' Teilraum eines μ_l für geeignetes l, so könnte man analog wie im Beweis von Satz 4 schließen, daß λ_k' direkter stetiger Summand von μ_l wäre. Dann hätten wir in der Homöomorphie von λ_k auf λ_k' aber eine Homöomorphie der einfachen Normalform $\omega\alpha$ n-ter Stufe auf einen direkten stetigen Summanden von $\omega\alpha_l$, einer einfachen Normalform (n—1)-ter Stufe, vor uns, die nach Satz 4 unmöglich ist. Daraus folgt nun, daß es zu jedem k ($k = 1, 2, \ldots$) ein $\mathfrak{x}^{(k)}$ aus λ_k geben muß, dessen Bild $\mathfrak{y}^{(k)}$ nicht in μ_{-k} liegt. Die Folge $\mathfrak{x}^{(k)}$ aus ψ^n konvergiert offenbar gegen 0; die Bildfolge $\mathfrak{y}^{(k)}$ dagegen divergiert, was der vorausgesetzten Homöomorphie widerspricht.

Analog wie die Nichthomöomorphie der einfachen Normalformen aus Satz 4 folgte, folgt aus Satz 6, daß zwei verschiedene Potenzen von ψ niemals homöomorph sind.

Die Resultate unserer Überlegungen fassen wir zusammen zu

Satz 7. Die in § 1 aufgestellten Normalformen sind untereinander nicht homöomorph.

Speziell ist damit gezeigt:

Sind zwei konvergenzfreie Räume endlicher Stufe homöomorph, so gehen sie bereits durch eine geeignete Permutation der Koordinaten ineinander über.

Ziehen wir jetzt die Überlegungen von A. Weber[9]) heran, so können wir aus unseren Resultaten sofort neue Ergebnisse über maximale Matrizenringe ableiten:

Die Gesamtheit $\Sigma(\lambda)$ der unendlichen Matrizen, die einen konvergenzfreien Raum λ endlicher Stufe in sich überführen, bildet einen maximalen Matrizenring[10]). Wir wollen diese Ringe als „konvergenzfreie Matrizenringe endlicher Stufe" bezeichnen.

Nach A. Weber § 3 folgt nun sofort

Satz 8. Zwei konvergenzfreie Matrizenringe n-ter Stufe sind dann und nur dann isomorph, wenn sie durch eine, an Zeilen und Spalten gleichzeitig ausgeführte, Permutation ineinander übergehen. Normalformen in bezug auf Isomorphie sind die zu den Normalformen der konvergenzfreien Räume endlicher Stufe gehörigen Matrizenringe.

---

[9]) Vgl. A. Weber, Isomorphismus maximaler Matrizenringe, erscheint demnächst im Journal für die reine und angewandte Mathematik.

[10]) Vgl. K. T. 2, §§ 6, 9, 15.

Lebenslauf.

Am 26. September 1908 wurde ich, Fritz Menn, evangelischer Konfession und preußischer Staatsangehörigkeit, als Sohn des Musiklehrers Friedrich Menn und seiner Ehefrau Maria, geb. Kickuth, zu Linden-Ruhr geboren. Vom 6. bis zum 9. Lebensjahre besuchte ich die Volksschule zu Linden. Ostern 1917 kam ich auf das Realgymnasium zu Hattingen-Ruhr, das ich Ostern 1926 nach bestandener Reifeprüfung verließ.

Von Ostern 1926 an studierte ich in Münster Mathematik, Physik und Musikwissenschaft. Am 3. Mai 1932 bestand ich dort die wissenschaftliche Staatsprüfung für das höhere Lehramt und trat dann am 1. Oktober 1932 als Studienreferendar in den Schuldienst ein.

Meine akademischen Lehrer waren: Behnke, Daniel, Fellerer, R. König, Köthe, Kratzer, v. Lilienthal, Prüfer, Scholz, G. Schmidt und Volbach. Allen diesen Herren spreche ich auf diese Weise meinen ehrerbietigsten Dank aus. Besonders Herrn Privatdozent Dr. Köthe, der die Arbeit mit großem Interesse verfolgte, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Fritz Menn.